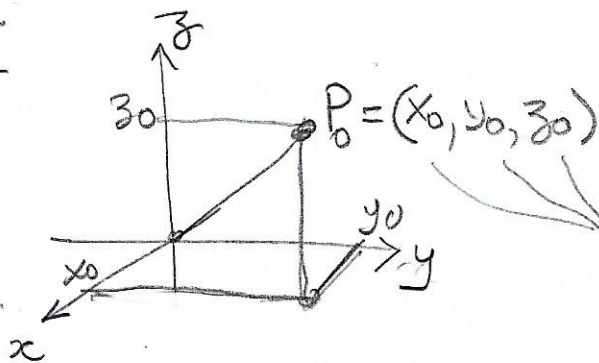


# Elementos geométricos no Espaço $\mathbb{R}^3$

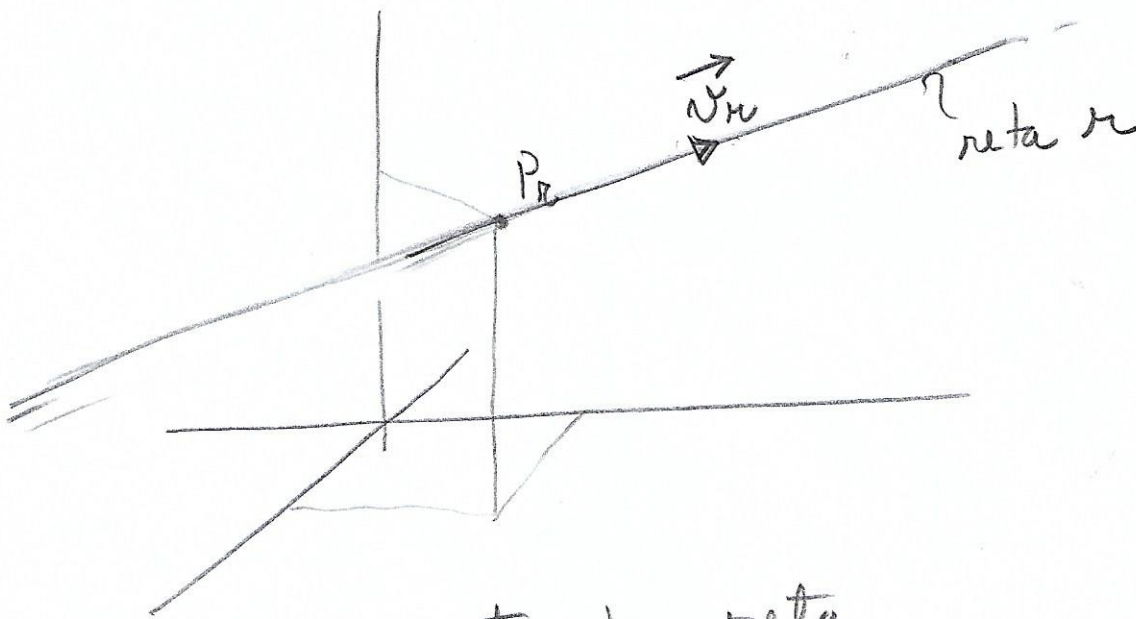
1

## Ponto



coordenadas nos  
eixos  $x, y, z$

Retas: A ideia mais simples de uma  
reta  $r$  é uma direção  $\vec{v}_r = (v_{r1}, v_{r2}, v_{r3})$   
e um ponto  $P_r = (P_{r1}, P_{r2}, P_{r3})$



então os pontos da reta

$$r: P = P_r + t \vec{v}_r \quad \text{com } \underbrace{t \in \mathbb{R}}_{\text{parâmetro}}$$

$$(x, y, z) = (P_{r1}, P_{r2}, P_{r3}) + t (v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}) = (P_{r1} + t v_{r1}, P_{r2} + t v_{r2}, P_{r3} + t v_{r2})$$

$$\Rightarrow x = P_{r1} + t v_{r1}$$

$$y = P_{r2} + t v_{r2}$$

$$z = P_{r3} + t v_{r3}$$

chamado equação paramétrica  
porque está em função  
do parâmetro  $t$

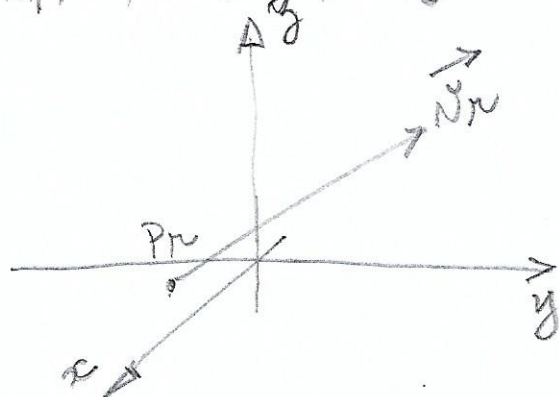
Então a reta  $r$  na versão paramétrica

(2)

$$r: \begin{cases} x = P_{r1} + t \cdot V_{r1} \\ y = P_{r2} + t \cdot V_{r2} \\ z = P_{r3} + t \cdot V_{r3} \end{cases}$$

Vamos analisar diferentes retas

$$V_{r1} \neq 0, V_{r2} \neq 0, V_{r3} \neq 0$$



Se  $t=0$  a equação é o ponto  $P_r$   
se  $t \neq 0$

$$t = \frac{x - P_{r1}}{V_{r1}} = \frac{y - P_{r2}}{V_{r2}} = \frac{z - P_{r3}}{V_{r3}}$$

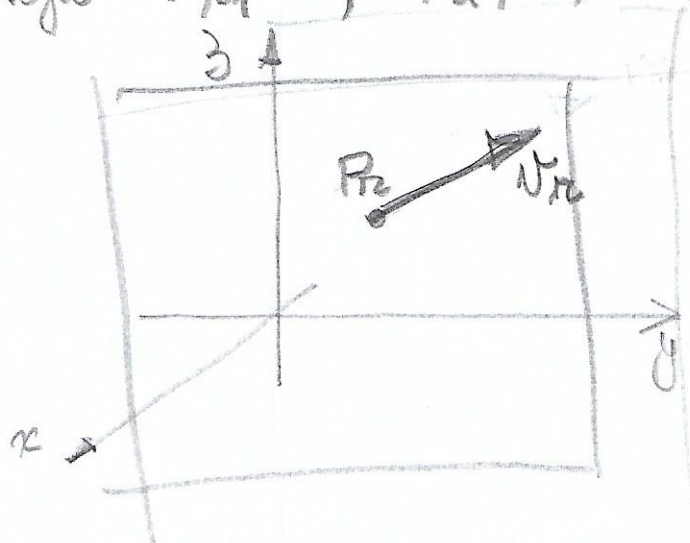
então

$$\frac{x - P_{r1}}{V_{r1}} = \frac{y - P_{r2}}{V_{r2}} = \frac{z - P_{r3}}{V_{r3}}$$

é chamada a equação simétrica  
da reta

vamos analisar se alguma das coordenadas de  $V_r$  é igual a zero

$$\text{seja } V_{r1} = 0, V_{r2} \neq 0, V_{r3} \neq 0$$



$V_r \parallel$  plano  $z, y$   
a reta é paralela a plano  $x, y$   
neste caso

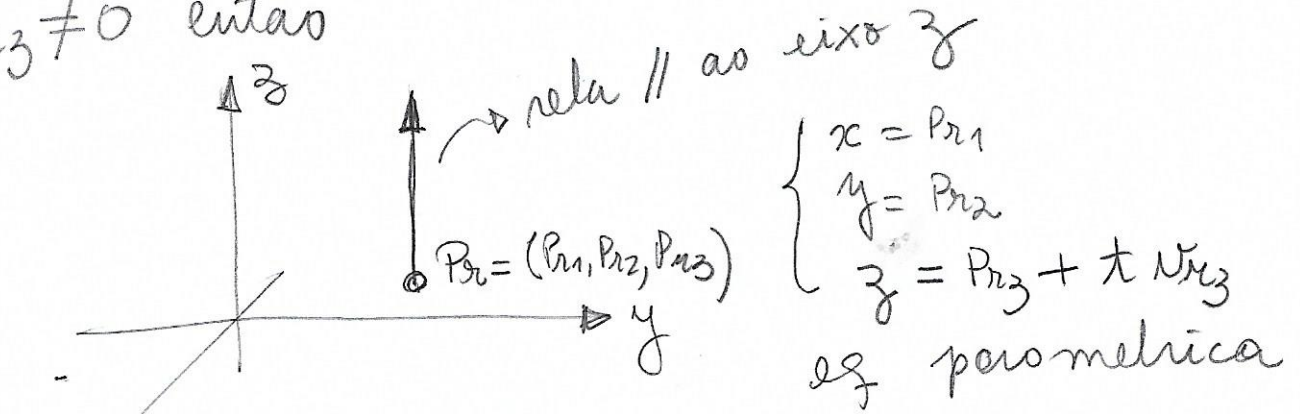
$$\begin{cases} x = P_{r1} \\ y = P_{r2} + t \cdot V_{r2} \\ z = P_{r3} + t \cdot V_{r3} \end{cases} \rightarrow \text{Paramétrica}$$

equações simétricas

$$x = P_{r1}; \quad \frac{y - P_{r2}}{V_{r2}} = \frac{z - P_{r3}}{V_{r3}}$$

Analisar agora quando dois <sup>coordenadas de  $N$  são zero</sup>  $N_{r1}=0$ ,  $N_{r2}=0$  e  $N_{r3} \neq 0$  então

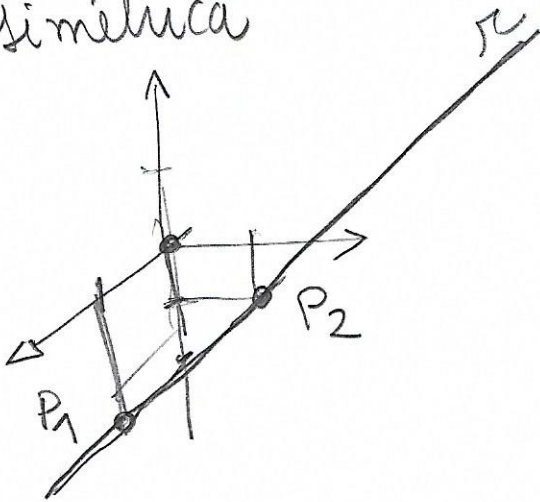
(3)



as equações simétricas são

$$x = P_{r1}; y = P_{r2}, z \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1 Dado os pontos  $P_1 = (1, 0, -2)$  e  $P_2 = (0, 1, -1)$   
Achar a equação da reta  $r$ , paramétrica e simétrica



então

$$\begin{aligned} N_r = \vec{P_1 P_2} &= (0, 1, -1) - (1, 0, -2) = \\ &= (-1, 1, 1) \end{aligned}$$

$P_r$  podem tomar  $P_1$  ou  $P_2$

tomamos  $P_1$

$$r: (0, 1, -2) + t(-1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ equação paramétrica}$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{(1)}$$

equação simétrica



Exemplo 2

dados a equação da reta

(4)

$$2x - 1 = -y + 3 \quad z = 2$$

achar a equação paramétrica e simétrica

$$2x - 1 = -y + 3 \Rightarrow \frac{x - 1/2}{1/2} = \frac{y - 3}{-1} ; z = 2$$

equação simétrica

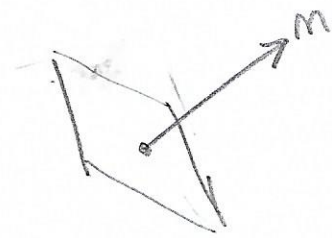
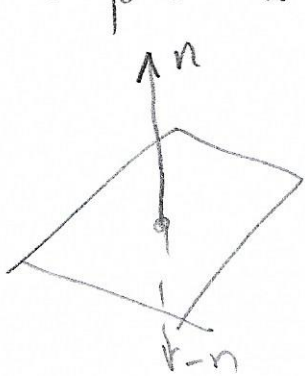
$$Pr = (1/2, 3, 2) \quad Vr = (1/2, -1, 0)$$

$$\begin{cases} x = 1/2 + \frac{1}{2}t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

equação paramétrica

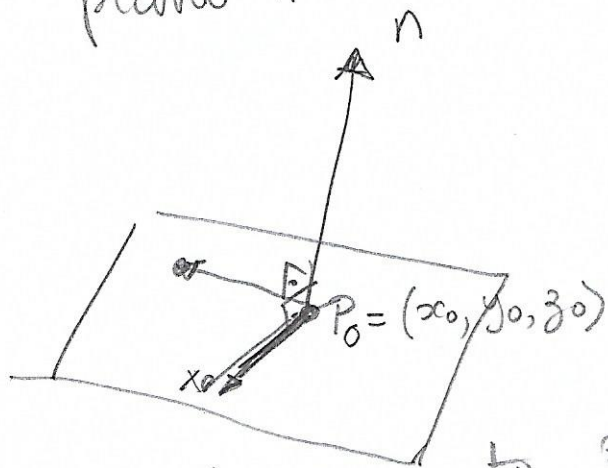
# Equações do Plano

vetor fundamental do Plano



o vetor normal se movimenta com o plano na verdade é a direção o que aponta ela sera dado a um vetor

seja  $\hat{n} = (a, b, c)$  vetor normal ao plano  $\Pi$  e  $P_0$  um ponto que pertence ao plano  $\Pi$



para qualquer ponto  $P \in \Pi$  tem que

$$(P - P_0) \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_d = 0$$

diremos que a equação cartesiana do plano é

(6)

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde caso  $d = (-ax_0 - by_0 - cz_0)$

Exemplo dado o ponto  $P_0 = (1, -2, 3)$  que pertence ao plano  $\pi$  e a direção normal ao plano  $\hat{n} = (-1, 2, 3)$  achar a equação cartesiana do plano

$$d = -(1)(-1) - (-2)(2) - (3)(3) = 1 + 2 - 9 = -6$$

$\Rightarrow$  equação do plano

$$\boxed{-x + 2y + 3z - 6 = 0}$$

Um plano pode ser dado por  $P_0 = (p_1, p_2, p_3)$  ponto e por dois vetores, não colineares

$u = (u_1, u_2, u_3)$ ;  $v = (v_1, v_2, v_3)$  isto significa

que

$$\pi: \underbrace{(x, y, z)}_{\text{ponto do plano}} = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3) + r(v_1, v_2, v_3)$$

a equação paramétrica do plano é

$$\begin{cases} x = p_1 + t u_1 + r v_1 \\ y = p_2 + t u_2 + r v_2 \\ z = p_3 + t u_3 + r v_3 \end{cases}$$



Exemplo: dado o plano que contém o ponto  $P_0 = (1, -1, 0)$  e tem os vetores  $(1, 0, -1)$  e  $(-2, 3, 1)$  Achar a equação paramétrica e cartesiana do plano

Paramétrica

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2r \\ y = -1 + 3r \\ z = -t + r \end{cases}$$

Equação cartesiana

$$n = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} = 3i + j + k$$

correção

$$\vec{n} = (3, 3, 3) = (3, 1, 1) \quad \text{correção}$$

equação cartesiana é

$$\cancel{x} = \cancel{x}\cancel{x}(\cancel{x}) - (+\cancel{x})(\cancel{x}1) - (\cancel{x})(\cancel{x}) = -\cancel{x}$$

$$d = -(3)(1) - (1)(-1) - (3)(0) = -2$$

$\Rightarrow$

$$3x - 3y + 2z - 2 = 0$$

$$3x - 3y + 2z - 2 = 0$$

correção

Exemplo: dado a equação cartesiana

$$2x + y - z + 2 = 0$$

Achar a equação paramétrica

vamos achar facilmente 3 pontos do plano

$$\text{se } z = y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P_0 = (-1, 0, 0)$$

$$\text{se } x = y = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow P_1 = (\cancel{x}, \cancel{x}) = (0, 0, 2) \quad \text{correção}$$

$$\text{se } z = x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow P_2 = (0, -2, 0)$$

Agora temos que os vetores  $u, v$  definidos (8)

$$\vec{u} = P_0 P_1 = (0, 0, +2) - (-1, 0, 0) = (1, 0, +2)$$

$$\vec{v} = P_0 P_2 = (0, -2, 0) - (-1, 0, 0) = (1, -2, 0)$$

são vetores do plano e  $P_0 \in \pi$  - plano.

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -1 + t + r \\ y = -2r \\ z = +2t \end{cases} \quad \text{equações}$$